ÖRNEK: X, t.d. nin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 1, 2 \\ \frac{1}{2} & , x = 3 \end{cases}$$

olarak veriliyor. X'in karakteristik fonk.nu bulunuz.

ÇÖZÜM: $\Phi_x(t) = E(e^{i.t.x}) = \sum_{R_x}^{3} e^{i.t.x} \cdot f(x)$

$$= e^{it} \cdot \frac{1}{4} + e^{2it} \cdot \frac{1}{4} + e^{3.i.t} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{it}}{4} \cdot \left[1 + e^{it} + 2 \cdot e^{2it}\right]$$ olur.

Not: Aynı t.d. nin Moment çıkaran fonk.nu daha önce

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = e^{t} \cdot \frac{1}{4} + e^{2t} \cdot \frac{1}{4} + e^{3t} \cdot \frac{1}{2}$$

olarak bulunmuştu. Dolayısıyla $M_x(t)$ ve $\Phi_x(t)$ arasındaki

$$\Phi_x(t) = M_x(it)$$ eşitlik kullanılarak ta

$\Phi_x(t)$ nin bulunabileceği görülmektedir. $M_x(t)$'de t yerine it yazılır.

ÖRNEK: Hilesiz bir zar atıldığında üste gelen sayı X t.d. olsun. X'in beklenen değer, varyans, $M_x(t)$ ve $\Phi_x(t)$-sini bulunuz.

ÇÖZÜM: X t.d. nin olasılık fonk.nu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 1, 2, \ldots, 6 \\ 0 & , — \end{cases}$$

olan kesikli düzgün dağılımdır.

Dağılımın ortalama ve varyansını hesaplayalım,

$$E(x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} \text{ //}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \left[\frac{\cancel{n}.(n+1).(2n+1)}{6}\right] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1).(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= (n+1) \cdot \left[\frac{(2n+1)}{\underset{(2)}{6}} - \frac{(n+1)}{\underset{(3)}{4}}\right]$$

$$= (n+1) \cdot \left[\frac{4n+2-3n-3}{12}\right] = \frac{(n+1).(n-1)}{12}$$

örnekte

$\underline{\underline{n=6}}$

$$= \frac{(6+1).(6-1)}{12} = \frac{35}{12} \text{ //}$$

$$\Rightarrow M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{n} e^{tx} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{6} (e^t + e^{2t} + \dots + e^{6t})$$

$$\Phi_x(t) = M_x(it) = E(e^{itx})$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (e^{it} + e^{2it} + \dots + e^{6it})$$

Örnek : X, r.d. nin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ile veriliyor. $f(x)$'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olma şartını sağladığını gösteriniz? ~~ve karakteristik fonk.nu bul~~

Çözüm : o.y.f. olması için,

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}_x} f(x) \cdot dx = 1 \quad \text{olmalı.}$$

$x<0$ $\quad$ $x>0$

$$\int_{\mathbb{R}_x} f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} e^{-x} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (e^{0} - e^{-\infty}) - \frac{1}{2} \cdot (e^{-\infty} - e^{0})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ //} \quad \text{old. dan}$$

$f(x)$ bir o.y.f. dır.

Örnek: X, t.d. ni −1, 0, 1 değerlerini $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ ihtimalleri ile almaktadır. X'in M.G.F. karakteristik fonk. nunu bulunuz. ve bundan yararlanarak $E(x)$ ve $V(x)$'i bulunuz?

Çözüm: olasılık tablosu düzenlenir,

$X = x_i$	−1	0	1
$p(X = x_i)$	1/6	2/3	1/6

$$\Rightarrow \Phi_x(t) = \sum_{\mathbb{R}x} e^{itx} \cdot p(x) = e^{-it} \cdot \frac{1}{6} + e^{0} \cdot \frac{2}{3} + e^{it} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (e^{-it} + e^{it}) + \frac{2}{3}$$

$$E(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_x(t=0) = -\frac{i}{6} \cdot e^{-it} + \frac{i}{6} \cdot e^{it} \Big|_{t=0}$$

$$= 0$$

$$E(x^2) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_x(t=0) = \overbrace{\left(\frac{i^2}{6} \cdot e^{-it} + \frac{i^2}{6} \cdot e^{it}\right)\Big|_{t=0}}^{i^2 \cdot m_2} \cdot i^2$$

$$= \frac{2 i^2}{6} \cdot i^2 \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$M_x(t) = e^{-t} \cdot \frac{1}{6} + e^{0} \cdot \frac{2}{3} + e^{t} \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(x) = \frac{\partial}{\partial t} M_x(t=0) = -\frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$E(x^2) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_x(t=0) = \frac{1}{6} \cdot e^{-t} + \frac{1}{6} \cdot e^{t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{3}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$